# ACADÉMIE DES SCIENCES.

## SÉANCE DU LUNDI 20 SEPTEMBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. LÉON GUIGNARD.

---

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

### DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

BOTANIQUE. — *Les canaux sécréteurs radiaux du bois.* Note de M. **Henri Lecomte**.

Les canaux sécréteurs contenus dans les tissus de la tige et de la racine affectent le plus souvent une direction parallèle à la longueur de l'organe et, dans ce cas, on peut les désigner sous le nom de *canaux sécréteurs longitudinaux*.

La présente Note a pour objet de montrer qu'un système de *canaux sécréteurs radiaux* peut, chez un grand nombre de plantes, se superposer au premier et le compléter.

Des canaux sécréteurs radiaux avaient déjà été signalés par divers observateurs, mais au titre de dispositions exceptionnelles.

C'est ainsi que Trécul, dans son travail intitulé : *Des vaisseaux propres dans les Térébinthacées*, avait montré l'existence de canaux sécréteurs dans les rayons médullaires de *Rhus viminalis* Ait. : « J'ai trouvé de ces vaisseaux propres, dépourvus de membrane, passant de l'écorce dans le bois, comme dans les plus beaux exemples de laticifères munis d'une membrane particulière [1]. »

Dans son *Manuel technique d'Anatomie végétale* (trad. franç., p. 130; 1886), Strasburger s'exprime de la façon suivante au sujet du bois de *Pinus sylvestris* : « Dans les plus grands des rayons médullaires, nous voyons courir horizontalement un canal sécréteur, et cette observation nous

---

[1] *Ann. Sc. nat. Bot.*, 5e série, t. 7, 1867, p. 118.

permet de supposer que les canaux verticaux et les horizontaux communiquent entre eux. »

A. Thil (*Constitution anatomique du bois*, Paris, 1900) fait une brève allusion (p. 13) à l'existence de ces canaux radiaux, sans préciser d'ailleurs les genres et les espèces présentant cette particularité et en émettant, en outre, une explication erronée de leur mode de formation, car il les croit simplement dus à la fonte des cellules.

Enfin, en 1909, Martin-Lavigne (*Recherches sur les bois de la Guyane*) figurait (p. 89) des canaux sécréteurs dans les rayons médullaires d'un bois attribué à une Burséracée, *Icica altissima* Aubl., dont la détermination reste douteuse.

L'existence de canaux radiaux contenus dans les rayons médullaires était donc, pour la première fois, mise en évidence par Trécul en 1867. Et cependant, peu de temps après, van Tieghem, dans son important Mémoire sur les canaux sécréteurs des plantes ([1]), avançait, au contraire, que chez les Anacardiacées et Burséracées (réunies anciennement sous le nom de Térébinthacées) les canaux sécréteurs ne se rencontrent que dans le liber primaire ou secondaire et, pour quelques espèces, au pourtour de la moelle. Cette assertion de van Tieghem, en opposition avec le fait avancé par Trécul, était ensuite confirmée par M^lle Leblois ([2]).

Les faits précis concernant la présence de canaux sécréteurs dans les rayons médullaires, se trouvaient donc réduits jusqu'à ce jour à deux ou trois et pouvaient être considérés comme exceptionnels. C'est ce qui nous a déterminé à grouper les observations que nous avons eu l'occasion de faire.

D'abord, en ce qui concerne les Conifères, nous avons rencontré des canaux sécréteurs radiaux très nets, contenus dans les rayons médullaires, chez les genres *Pinus*, *Picea* et *Larix*. Les espèces du genre *Pinus* chez lesquelles nous avons trouvé des canaux sécréteurs radiaux sont : *P. sylvestris* L., *P. Cembra* L., *P. Strobus* L., *P. Laricio* Poir., *P. halepensis* Mill., *P. mitis* Michx., *P. australis* Michx., *P. rigida* Mill., *P. bruttia* Tenore, *P. Pinea* L., *P. insularis* Endl., *P. Merkusii* Jungh. Le même fait a été observé par nous chez *Picea excelsa* Link et *P. nigra* Link et enfin dans le bois de *Larix europœa* D. C.

Au contraire, les canaux radiaux nous ont paru faire complètement défaut dans le bois de diverses espèces des genres *Abies*, *Cedrus*, *Cunnin-*

---

([1]) *Ann. Sc. nat. Bot.*, 5e série, t. 16, p. 172.

([2]) *Ibid.*, 7e série, t. 6, p. 294, et tirés à part, p. 48.

*ghamia*, *Thuya*, *Dacrydium*, *Araucaria*, *Podocarpus*, *Keteleeria*, *Phyllocladus*, *Fookienia* et *Juniperus* (¹).

En résumé on peut dire que chez les genres *Pinus*, *Picea* et *Larix*, il existe toujours des canaux sécréteurs radiaux contenus dans les rayons du bois, en même temps que des canaux sécréteurs longitudinaux.

L'examen du bois de diverses Anacardiacées nous a fourni l'occasion de rencontrer des canaux sécréteurs radiaux chez *Parishia Malabog* Merr., des Philippines; *Melanorrhœa laccifera* Pierre, d'Indochine; *Swintonia Pierrei* Hance, d'Indochine; *Spondias mangifera* Willd., d'Indochine; *Spondias lakonensis* Pierre, d'Indochine.

Nous avons recherché en vain la même structure chez les diverses espèces des genres *Mangifera* et *Dracontomelum*.

Certaines Anacardiacées possèdent donc des canaux radiaux et les autres en manquent. Avec *Rhus viminalis* Ait., signalé par Trécul, le nombre des espèces à canaux radiaux s'élève actuellement à six.

En ce qui concerne les Burséracées, nous devons reconnaître que si nous avons observé des canaux sécréteurs radiaux dans deux bois de nos collections attribués à des Burséracées, mais dont nous n'avons pas eu la possibilité de vérifier personnellement la détermination : *Protium acuminatum* W. et A. et *Bursera gummifera* L., nous devons ajouter que ces canaux nous ont paru manquer chez plusieurs espèces de *Canarium* bien authentiques, d'Indochine, de même que chez *Aucoumea Klaineana* Pierre, de la côte d'Afrique.

Si la présence des canaux sécréteurs radiaux est indiscutable chez les Anacardiacées, elle reste donc problématique chez les Burséracées.

Dans le travail signalé plus haut, Trécul ajoute au sujet de *Rhus viminalis* Ait. : « Ce qu'il y a de singulier, c'est que ces vaisseaux, dont il y a quelquefois deux dans le même rayon médullaire, ne communiquent pas avec ceux de la moelle. »

Nous avons porté notre attention sur ce point, en particulier au sujet du bois de *Spondias lakonensis* Pierre, dont nous avons étudié des branches de $7^{mm}$-$8^{mm}$ de diamètre.

Dans le bois de cette espèce, on peut constater d'abord la présence de canaux sécréteurs longitudinaux, les uns situés dans la partie extérieure du liber primaire, les autres au pourtour de la moelle, et ces deux groupes de

(¹) Bien entendu, les résultats négatifs ne peuvent être considérés comme définitifs, car les canaux peuvent être rares et échapper à l'observation.

canaux paraissent indépendants l'un de l'autre. Ils existent seuls, tant que l'organe présente la structure primaire.

Au moment où s'établit la structure secondaire, se forment, dans le liber secondaire, de nouveaux canaux sécréteurs longitudinaux situés en dedans de ceux que possède le liber primaire et en général plus petits que ces derniers. En même temps, il se développe, et par le même procédé schizogène, des canaux dirigés horizontalement et situés dans quelques-uns des rayons médullaires. Ces derniers canaux sont en communication avec les canaux longitudinaux d'origine secondaire, mais ils ne communiquent ni avec ceux de la moelle, ni avec ceux qui se sont développés les premiers dans le liber primaire.

Les Anacardiacées peuvent donc posséder dans la tige des canaux sécréteurs qui sont les uns d'origine primaire, les autres d'origine secondaire. Ces deux systèmes paraissent indépendants l'un de l'autre.

Les canaux sécréteurs d'origine secondaire comprennent toujours des canaux formés dans le liber secondaire et affectant une direction parallèle à l'axe de l'organe. Chez les espèces signalées précédemment, ces canaux longitudinaux se compliquent de ramifications transversales qui pénètrent dans les rayons médullaires et n'ont aucune communication avec ceux de la moelle.

L'indépendance signalée par Trécul entre les canaux des rayons et ceux de la moelle pour *Rhus viminalis* Ait. se vérifie donc pour d'autres espèces et constitue probablement la règle.

Il y a lieu, par conséquent, dans l'étude de la structure des tiges et des racines, de tenir compte des *canaux sécréteurs radiaux*, qui peuvent exister concurremment avec les *canaux sécréteurs longitudinaux*.

M. J. Costantin fait hommage à l'Académie du fascicule 6, Tome II, des *Annales des Sciences naturelles : Botanique*.

## CORRESPONDANCE.

MM. Maurice Arthus, Paul Bertrand et Ch. Dhéré adressent des remercîments pour les distinctions que l'Académie a accordées à leurs travaux.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les fonctions hypercylindriques dans l'espace à $n+2$ dimensions.* Note ([1]) de M. **Pierre Humbert.**

La fonction $G(\alpha, \beta, \gamma, x, y)$ que nous avons définie dans notre dernière Note ([2]) s'introduit également quand on cherche les fonctions hypercylindriques dans l'espace à $n+2$ dimensions, c'est-à-dire des solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_{n+2}^2} = 0,$$

où l'on fait le changement de variables

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \sin\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1},\\
x_2 &= \rho \sin\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1},\\
x_3 &= \rho \sin\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= \rho \sin\theta \cos\varphi_1,\\
x_{n+1} &= \rho \cos\theta,\\
x_{n+2} &= t.
\end{aligned}$$

L'équation prend alors la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^n \sin^{n-1}\theta \sin^{n-2}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2} \frac{\partial U}{\partial\rho}\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\rho^{n-2} \sin^{n-3}\theta \sin^{n-2}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2} \frac{\partial U}{\partial\theta}\right]\\
&+ \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left[\rho^{n-2} \sin^{n-3}\theta \sin^{n-4}\varphi_1 \ldots \sin^{n-i-2}\varphi_{i-1} \sin^{n-i-1}\varphi_i \sin^{n-i-2}\varphi_{i+1} \ldots \sin\varphi_{n-2} \frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right]\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho^n \sin^{n-1}\theta \sin^{n-2}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2} \frac{\partial U}{\partial t}\right] = 0,
\end{aligned}$$

et l'on en cherchera des solutions du type

$$U = f_0(t) f_1(\varphi_1) \ldots f_{n-1}(\varphi_{n-1}) V(\rho, \theta).$$

Indiquons, sans entrer dans le détail des calculs, le résultat qu'on peut obtenir.

Si $\lambda$ et $\mu$ sont des nombres entiers, et $\nu$ un nombre quelconque, désignons par le symbole

$$C^{\nu}_{\lambda,\mu}(z)$$

([1]) Séance du 13 septembre 1920.

([2]) *Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 490.

la fonction

$$(1-z^2)^{\frac{\nu}{2}}\frac{d^\nu}{dz^\nu}C_\lambda^\nu(z),$$

c'est-à-dire la fonction qui joue par rapport au polynome $C_\lambda^\nu$ de Gegenbauer le même rôle que la fonction adjointe de Legendre, $P_n^m$, par rapport au polynome $P_n$ de Legendre. Cette fonction $C_{\lambda,\mu}^\nu(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+2\nu\cot\varphi\frac{du}{d\varphi}+u\left[\lambda(\lambda+2\nu)-\frac{\mu(\mu+2\nu-1)}{\sin^2\varphi}\right],$$

où $\cos\varphi=z$, et se réduit à $P_\lambda^\mu$ pour $\nu=\frac{1}{2}$.

Rappelons enfin que nous avons posé

$$G(\alpha,\beta,\gamma,x,y)=\lim_{M\to\infty}F_3\left(\alpha,M,\beta,M,\gamma,x,\frac{y}{M^2}\right)=\sum_m\sum_n\frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m+n)}\frac{x^m y^n}{m!\,n!}.$$

On vérifiera alors que, les $m_i$ étant des entiers arbitraires, une solution de l'équation de Laplace est

$$U=e^{Kt}\cos m_1\varphi_{n-1}C_{m_2,m_1}^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi_{n-2})C_{m_3,m_2}^{1}(\cos\varphi_{n-3})\ldots C_{m_{n-1},m_{n-2}}^{\frac{n}{2}-1}(\cos\varphi_1)$$
$$\times\frac{\tan^{m_{n-1}}\theta}{\cos^{n-1}\theta}G\left(\frac{m_{n-1}+n}{2},\frac{m_{n-1}+n-1}{2},\frac{n+1}{2},1+\tan^2\theta,-\frac{K^2\rho^2}{4}\right).$$

En faisant $n=2$, nous retrouvons bien le résultat de notre dernière Note.

La fonction hypersphérique zonale dans l'espace à $n+2$ dimensions s'obtiendra en annulant tous les $m$. Ce sera donc

$$V'(\rho,\theta)=\frac{1}{\cos^{n-1}\theta}G\left(\frac{n}{2},\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2},1+\tan^2\theta,-\frac{K^2\rho^2}{4}\right).$$

En particulier, si $n=1$, nous sommes dans l'espace à trois dimensions et nous aurons alors

$$V'(\rho,\theta)=G\left(\frac{1}{2},0,1,1+\tan^2\theta,-\frac{K^2\rho^2}{4}\right)=\sum_n\frac{1}{(1,n)}\frac{\left(-\frac{K^2\rho^2}{4}\right)^n}{n!}=J_0(K\rho),$$

ce qui s'accorde bien avec ce que l'on sait de la fonction cylindrique zonale.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur les ensembles de mesure nulle à plusieurs dimensions*. Note de M. S. Stoïlow.

Les ensembles de points qui font partie d'un espace à un nombre quelconque de dimensions présentent certaines propriétés résultant de leur grande variété de structure, dont les analogues, même quand elles existent, sont beaucoup plus difficiles à saisir dans un ensemble linéaire. C'est ce fait qui m'a conduit à l'idée de me servir des ensembles à plusieurs dimensions pour essayer de classer les ensembles linéaires de mesure nulle d'une manière indépendante de leur mode de formation [1]. Dans cette Note je me propose seulement d'attirer l'attention sur une propriété des ensembles de points situés dans un espace à un nombre quelconque (plus grand que 1) de dimensions et dont la *mesure* (au sens actuellement adopté pour ce terme, qui est celui de MM. Borel et Lebesgue) est nulle.

Pour plus de simplicité, je me bornerai aux ensembles situés dans un espace à deux dimensions; il va de soi que des remarques toutes analogues s'appliquent aux ensembles à un nombre quelconque de dimensions plus grand que 2.

Soit donc E un ensemble de points situés dans un plan et définis par leurs coordonnées cartésiennes $x$ et $y$. Je supposerai cet ensemble borné et de mesure *superficielle* nulle. En général, les ensembles linéaires $E_x$ et $E_y$, qui sont les projections de E sur les deux axes de coordonnées (qui ne sont d'ailleurs pas nécessairement rectangulaires), ne seront pas de mesure *linéaire* nulle. Soient donc $l_x$ et $l_y$ leurs mesures *extérieures* (au sens de M. Lebesgue). Nous allons faire subir à l'ensemble E une transformation définie par

$$X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y), \tag{1}$$

où $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont supposées continues, ayant des dérivées continues, des deux premiers ordres au moins, et telles que la transformation qu'elles définissent soit biunivoque dans une région limitée du plan contenant l'ensemble E. On pourra partager cette région en plusieurs autres telles que dans chacune d'elles les dérivées premières de $f(x, y)$ et de $\varphi(x, y)$ gardent le même signe.

Considérons, en particulier, celle de ces régions où $f_x$ et $f'_y$ sont posi-

---

(1) *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 766.

tives, en supposant, pour fixer les idées, que $f(x, y)$ soit telle qu'une pareille région existe.

Envisageons maintenant une suite de parallélogrammes de côtés parallèles aux axes,

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_i, \quad \ldots,$$

et tels que chaque point de $E_1$ se trouve dans l'un au moins de ces parallélogrammes et désignons par

$$x'_i, x''_i \quad \text{et} \quad y'_i, y''_i \tag{2}$$

les coordonnées des sommets de $a_i$, de façon que

$$x''_i > x'_i \quad \text{et} \quad y''_i > y'_i.$$

On aura alors évidemment

$$\Sigma X''_i - X'_i = \Sigma (x''_i - x'_i) f'_{x'_i} + \Sigma (y''_i - y'_i) f'_{y'_i} + \Sigma (x''_i - x'_i)^2 f''_{x'^2_i} + \ldots,$$

en désignant par $X'_i$, $X''_i$ et $Y'_i$, $Y''_i$ les valeurs des seconds membres de (1) pour les valeurs (2) des variables.

L'ensemble E, et donc $E_1$ *a fortiori*, étant de mesure superficielle nulle, on pourra prendre les $a_i$ aussi petits que l'on voudra. On aura donc, à la limite, en désignant par $L_x$ et $L_y$ les quantités analogues à $l_x$ et $l_y$ pour le transformé de $E_1$, l'inégalité-égalité

$$L_x \leqq \int f'_x dx + \int f'_y dy;$$

les signes $\int$ désignent les intégrales de Lebesgue prises le long des ensembles $E_x$ et $E_y$, ou les valeurs supérieures de ces intégrales dans le cas où les ensembles $E_x$ et $E_y$ ne seraient pas mesurables.

Mais il est facile de voir que cette relation est toujours une égalité. On peut en effet prendre toujours les intervalles $X''_{i+1} - X'_i$ assez petits pour que la somme

$$\Sigma X''_{i+1} - X'_i$$

soit aussi voisine que l'on voudra de $L_x$ et l'on obtiendrait alors l'inégalité inverse. On a donc

$$L_x = \int f'_x dx + \int f'_y dy, \tag{3}$$

et évidemment pour $L'_y$ une égalité analogue.

Ceci est valable dans la région où $f'_x$ et $f'_y$ sont positives à la fois; on

peut considérer la frontière de cette région comme en faisant partie; quant aux autres régions, on pourra y changer $x$ en $-x$ ou $y$ en $-y$, suivant le cas, et y obtenir des égalités analogues à (3), aux signes près, pour les autres parties de E.

De (3) il résulte immédiatement que si un ensemble de points d'un plan possède deux projections, suivant deux directions différentes situées dans le plan, de mesure *linéaire* nulle, il en est de même de *toutes les projections des ensembles obtenues en transformant* E *par* (1).

On voit ainsi, en particulier, que les ensembles superficiels de mesure nulle peuvent être classés en deux grandes catégories : l'une contenant ceux dont la projection suivant une seule direction *au plus* peut être de mesure linéaire nulle, l'autre contenant ceux dont *toutes* les projections sont de mesure linéaire nulle.

Ces derniers ensembles jouent un rôle important dans la classification des ensembles linéaires de mesure nulle, que j'ai indiquée dans la Note citée plus haut.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur la recherche des points singuliers d'une fonction définie par un développement en série de Taylor.* Note [1] de M. **J. Soula**.

1. Je considère deux séries de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

dont les rayons de convergence ne sont ni nuls ni infinis. J'effectue le prolongement analytique de ces séries en suivant des chemins qui ne font le tour d'aucun point singulier, et je définis ainsi deux fonctions analytiques que je désigne respectivement par $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Je considère ensuite le résultat de la combinaison de ces deux fonctions par l'opération de M. Hadamard, et je pose

$$\mathrm{H}[f, \varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n.$$

On sait que la nouvelle fonction, que je définis ainsi, sera régulière en

[1] Séance du 16 septembre 1920.

tout point autre que les points d'affixe $\alpha\beta$, $\alpha$ étant un point singulier de $f(x)$ et $\beta$ un point singulier de $\varphi(x)$.

On sait que M. Borel (¹) a montré qu'un tel point $\alpha\beta$ n'est pas toujours point singulier de $H[f, \varphi]$. Le point $\alpha\beta$ peut être régulier en particulier, s'il existe deux autres points singuliers de $f(x)$ et $\varphi(x)$, que je désigne respectivement par $\alpha'$ et $\beta'$, tels que $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$. Je dirai, dans ce dernier cas, que $\alpha\beta$ peut être obtenu plusieurs fois. La singularité $\alpha\beta$ peut disparaître sans que $\alpha\beta$ soit obtenu plusieurs fois.

On est donc conduit à distinguer deux catégories de points singuliers : uu point singulier $\beta$ de $\varphi(x)$ peut être tel que $H[f, \varphi]$ admette $\alpha\beta$ comme point singulier, quelle que soit la fonction $f(x)$, toutes les fois que $\alpha\beta$ ne peut être obtenu qu'une seule fois. C'est ce qui se produit si $\beta$ est un pôle, comme cela résulte des remarques de M. Borel, relatives au théorème de M. Hadamard. Il se peut, au contraire, que la singularité en $\beta$ de $\varphi(x)$ soit telle que $H[f, \varphi]$ soit régulière en $\alpha\beta$ quand on choisit convenablement $f(x)$, et cela sans qu'on se trouve dans le cas banal où $\alpha\beta$ est obtenu plusieurs fois.

Je dirai que les points singuliers de la première catégorie sont des points singuliers principaux.

Je suppose qu'une fonction $\varphi(x)$ possède le point singulier $\beta$ et que l'on puisse écrire

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \Phi(x),$$

$\varphi_1(x)$ étant la partie irrégulière pour $x = \beta$, je veux dire par là que $\varphi(x)$ ne possède pas d'autre singularité que $x = \beta$ et que $\Phi(x)$ est régulière en $\beta$. La question de savoir si $x = \beta$ est singulier principal pour $\varphi(x)$ ne dépend que de la partie irrégulière $\varphi_1(x)$ comme on le verra aisément. Il est donc naturel de supposer que $\varphi(x)$ ne possède qu'un point singulier et de chercher à quelle condition ce point est principal.

Je ne signale ici que le critérium suivant : Si la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier $\beta$ à distance finie, pour que ce point soit principal, il est nécessaire et suffisant que la fonction $\psi(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$ ait un rayon de convergence différent de zéro et qu'elle ne possède pas d'autre singularité que $\frac{1}{\beta}$ à distance finie.

---

(¹) Borel, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 26).

La démonstration utilise les égalités

$$\mathrm{H}[\varphi, \psi] = \frac{1}{1-x}, \qquad \mathrm{H}\big[\psi, \mathrm{H}[f, \varphi]\big] = f(x).$$

De la proposition précédente on peut déduire que si $\varphi(x)$ ne possède, pour toute singularité à distance finie, que le point singulier principal $\beta$ la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite.

Ces deux propriétés peuvent permettre de reconnaître, dans certains cas, si un point singulier est ou n'est pas principal. Les pôles sont des points singuliers principaux et il en existe bien d'autres. Par contre, la fonction

$$\varphi(x) = \sum e^{n[-1+\cos(\mathrm{L}\,n)^{\theta}]} \qquad (0 < \theta < 1)$$

ne possède que le point singulier 1 [1] qui n'est pas principal.

La considération des points singuliers principaux peut être utile pour déterminer les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor. Parmi les problèmes où cette notion peut intervenir, je signale le suivant : On se donne une fonction analytique $\rho(x) = \Sigma a_n x^n$ qui ne possède, sur son cercle de convergence du rayon R, que le point singulier $\beta$ principal et isolé. Elle admet d'autres points singuliers $\beta_1$, $\beta_2$, .... On se propose de chercher les points singuliers de la fonction $\psi(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$. Cette recherche est basée sur l'égalité

$$\mathrm{H}[\varphi, \psi] = \frac{1}{1-x}.$$

Sur son cercle de convergence, $\psi(x)$ n'admet que le point singulier $\frac{1}{p}$. Les autres points singuliers $\gamma$ de $\psi(x)$ sont tous donnés par la formule

$$\gamma = \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p}{\beta^{p+1}},$$

les facteurs du numérateur étant des points singuliers de $\varphi(x)$, qui ne sont pas nécessairement distincts.

---

(1) Fabry, *Sur les séries de Taylor* (*Acta math.*, t. 22).

CHRONOMÉTRIE. — *Interprétation géométrique de la méthode Résal-Caspari.* Note de M. J. ANDRADE.

La méthode de Résal utilisée par Caspari pour l'étude du spiral de Le Roy est susceptible d'une interprétation utile que j'énoncerai ainsi :

*La pression complémentaire du couple d'encastrement qu'un spiral cylindrique simple transmet par sa virole au balancier a une composante transverse dirigée suivant la droite joignant la virole au point* $Q_1$, *projection du piton* Q *sur le plan transverse de cette virole* W; de plus, si l'écart $u$ du balancier est compté dans le sens où le spiral se ferme, cette force *est répulsive*, et pour un spiral de Le Roy sa valeur est

$$u\frac{2\,\mathrm{EI}}{\mathrm{R}^2}\,\frac{1}{\mathrm{P}^2}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{W}}}{\mathrm{R}}\,\mathrm{C};$$

EI, moment élastique pour la flexion de la section du spiral; R, le rayon de virole; P, étendue angulaire du spirale, ici égale à $\left(2n \pm \frac{1}{2}\right)\pi$; C, coefficient dont l'expression est

$$\mathrm{C} = \frac{\left(1+\frac{u}{\mathrm{P}}\right)^2}{1+\frac{\cos u}{\mathrm{P}}-\frac{4}{\mathrm{P}^2}+\frac{u}{\mathrm{P}}-\frac{4\sin u}{\mathrm{P}^2}}.$$

Pour $u < 0$, cette répulsion se change en attraction.

Conséquence pour le doublet à viroles coïncidentes, formé d'éléments égaux :

Sur la virole commune aux deux éléments de ce doublet, et vu la petitesse de $\frac{1}{\mathrm{P}}$, *la pression complémentaire résultante* sur la virole se réduit à une force parallèle à un diamètre du balancier dont la direction, fixe dans l'espace, est dans le plan longitudinal contenant l'axe du balancier et les deux pitons, la valeur de cette force est sensiblement égale à $\frac{4\,\mathrm{EI}}{\mathrm{R}^2}\,\frac{1}{\mathrm{P}^2}\,u$.

Cette interprétation signale et corrige immédiatement une erreur de calcul qui s'est glissée à la fin de ma dernière Note dont l'exemple final doit être ainsi corrigé :

La pression complémentaire transverse exercée sur la virole commune du doublet sinusoïdal engendre un roulement frottant sur le collier de l'appui latéral supérieur et dont la valeur, proportionnelle au produit $u \sin u$, fonc-

tion paire, ne produit qu'une perturbation d'isochronisme de l'ordre du carré de cette cause; cette perturbation ne s'aggrave que pour les perturbations séculaires ou à longue période qui sont liées à la vieillesse des huiles.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Valeurs de l'aplatissement de la Terre obtenues par le calcul et par les mesures.* Note de M. **Alex. Véronnet**, transmise par M. P. Appell.

H. Poincaré avait montré, par une remarque géniale sur une formule étudiée déjà par Tisserand et Radau, que l'inverse de l'aplatissement $e$ de la Terre ne pouvait pas être inférieur à 297,10 quelle que fût la loi des densités à l'intérieur. Cette déduction supposait seulement que la Terre tournait tout d'une pièce et elle utilisait uniquement le rapport $\varphi$ de la force centrifuge à l'attraction et le rapport J relatif aux moments d'inertie de la Terre, rapport déterminé par le coefficient de précession.

J'ai pu, dans ma Thèse ([1]), déterminer une *limite supérieure extrêmement voisine*, basée sur les mêmes conditions, et qui donnait en première approximation, en négligeant $e^2$,

$$297,10 \leqq \frac{1}{e} \leqq 297,39 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{e} = 297,25 \pm 0,15.$$

Plus de 20 calculs numériques, faits avec différentes lois de densité, donnent toujours, à quelques centièmes près seulement, des nombres voisins de 297,17, valeur la plus probable.

Comme dans les mesures géodésiques et celles de la variation de la pesanteur, on tient compte de $e^2$, j'ai calculé ce que devenaient ces limites en seconde approximation. Je tiens à rectifier une légère erreur qui m'avait donné des nombres trop faibles de 0,5 ([2]). Dans la formule (109), il faut $2(e\eta)$ au lieu de $4(e\eta)$. Les corrections relatives à $e^3$ sont négligeables et l'on obtient, en toute approximation, les limites

$$296,73 \leqq \frac{1}{e} \leqq 297,50 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{e} = 297,12 \pm 0,38,$$

avec la valeur probable 297,19 donnée par les diverses lois de densité, avec

([1]) *Journal de Math.*, 1912, p. 390.
([2]) *Journal de Math.*, 1912, p. 414.

moins de 0,1 d'écart. La valeur 297,2 pourrait être choisie comme la plus sûre pour l'ellipsoïde de référence auquel on rapporte le géoïde et les mesures géodésiques.

On montre facilement (p. 391) que les erreurs sur $\Phi$ et J introduisent des erreurs égales sur la valeur de $1 : e$. On peut être assuré ainsi des centièmes.

Pour le calcul de l'aplatissement au moyen du pendule ou de la *variation de la pesanteur*, les nombres calculés sont à peine modifiés. Le terme en $\cos^4 l$, introduit dans l'expression de $g$, varie dans des limites assez étroites. Sa valeur calculée (p. 417) est pratiquement nulle, avec toutes les lois de densité connues, ce qui est vérifié d'ailleurs par les observations du pendule. (On peut noter qu'Helmert (*Höhere Geodäsie*, t. 2, p. 77) avait déduit de ce fait, au grand scandale de G.-H. Darwin, que l'ellipsoïde devait être renflé et non déprimé vers 45°.) Le terme en $\cos^2 l$ introduit une correction comprise entre 3,60 et 3,80 pour toutes les lois de densités. Il suffit d'augmenter les anciennes valeurs de $1 : e$ de cette quantité pour tenir compte de $e^2$. L'ancien chiffre calculé par Faye par exemple devient 296,7 et se trouve en assez bon accord avec les déterminations plus récentes.

Tous ces nombres sont donnés dans l'hypothèse où *la Terre tourne tout d'une pièce*. J'ai calculé les modifications introduites dans le cas où la vitesse des couches intérieures serait différente de celle de la surface (*Journal de Mathématiques*, p. 427). L'inverse de l'aplatissement diminuera d'une unité si la vitesse moyenne à l'intérieur est augmentée de 0,007 seulement. Si les mesures géodésiques et les mesures du pendule vérifient le nombre 297, donné par le calcul (et il semble bien qu'il en est ainsi), il faudra en conclure que la Terre tourne sensiblement tout d'une pièce. Le ralentissement dû aux frottements des marées sur l'écorce serait insensible et cette action des marées, invoquée par Darwin en particulier, serait à écarter des explications cosmogoniques.

Remarquons enfin que ces calculs ne peuvent pas nous renseigner sur la *variation des densités* à l'intérieur de la Terre, puisque la valeur de l'aplatissement en est à peu près indépendante. Cependant les lois de densité choisies devront donner des aplatissements concordants, suivant qu'on les calculera en tenant compte de $\varphi$, c'est-à-dire de l'attraction, ou en tenant compte de J, c'est-à-dire du coefficient de précession. La formule de Roche reproduite jusqu'en 1919 par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* sous la forme $\rho = 10,0 - 7,5\, r^2$ donne 291,14 dans le premier cas et 298,53 dans le second, résultats assez éloignés. Si l'on admet la formule de Roche et la

densité moyenne 5,5, il faut prendre (*Journal de Mathématiques*, p. 444)

$$\rho = 10{,}41 - 8{,}18\, r^2, \qquad \rho_1 = 2{,}23$$

qui donne la valeur 297,18 dans les deux cas. La densité moyenne superficielle serait égale à 2,23.

On a alors pour la formule de la *pesanteur à l'intérieur* de la Terre

$$g = 1{,}86\, g_1 (1 - 0{,}472\, r^2)\, r$$

avec un maximum égal à 1,04 à la profondeur 0,16. On retrouve la valeur de la pesanteur à la surface pour $r = 0{,}67$. La pesanteur reste sensiblement constante à $\frac{4}{100}$ près, sur le tiers du rayon, c'est-à-dire pour les $\frac{7}{10}$ de la masse.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la formule de Stokes dans l'espace-temps.* Note [1] de M. A. **Buhl**, transmise par M. P. Appell.

Dans mes Mémoires des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1912, p. 403-406; 1913, p. 370-372) j'ai donné une formule, du type stokien, relative à l'espace à quatre dimensions, laquelle, avec les notations de M. Th. De Donder déjà invoquées dans ma précédente Note (9 août 1920), peut s'écrire

$$(1)\qquad \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\, dx_2}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x_3, x_4)}} = -\int\!\!\int\!\!\int_V \Delta \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_4}}$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

On trouvera d'ailleurs une première ébauche de cette formule dans les

---

[1] Séance du 13 septembre 1920.

*Comptes rendus* du 8 juillet 1912. La variété $V(F=0)$ est une cloison à trois dimensions qui, dans l'espace à quatre, peut se déformer arbitrairement à condition de toujours passer par $S(F=0, G=0)$, variété frontière fermée à deux dimensions.

Le premier membre de (1) peut aussi bien s'écrire

$$-2\int\int_S M_{12}\,dx_1\,dx_2 + M_{13}\,dx_1\,dx_3 + \ldots + M_{34}\,dx_3\,dx_4,$$

ce qui rend encore plus évidente l'analogie avec la formule de Stokes ordinaire et montre qu'il n'y a rien, dans (1), qui ne soit dans l'analyse des formes intégrales et invariants intégraux de M. Th. De Donder (*Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein*). Mais (1) paraît mettre en évidence, de façon extrêmement remarquable, les symétries du champ électromagnétique et gravifique. La chose est même si marquée qu'il n'y a plus besoin d'écrire de formules pour indiquer des résultats essentiels; la très simple description des symétries en question est suffisante.

1° *Si, dans* $\Delta$, *on remplace la première ligne par*

$$-2\rho V_{x_1}, \quad -2\rho V_{x_2}, \quad -2\rho V_{x_3}, \quad -2\rho$$

*et si l'on égale ces termes aux coefficients qu'ils ont alors dans* $\Delta$, *on a les équations du champ électromagnétique.*

2° *Si, dans les équations ainsi obtenues, on remplace* $\rho$ *par zéro et les* $M_{ij}$ *par des* $M^{\star}_{ij}$ (définis encore très brièvement dans la précédente Note), *on a les équations du champ gravifique.*

3° *Si, dans* $\Delta$, *on remplace la première ligne par*

$$\frac{M^{\star}_{i1}}{\sqrt{-g}}, \quad \frac{M^{\star}_{i2}}{\sqrt{-g}}, \quad \frac{M^{\star}_{i3}}{\sqrt{-g}}, \quad \frac{M^{\star}_{i4}}{\sqrt{-g}},$$

*ce déterminant devient* $-2F_i$.

$F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ sont les composantes de la force mécanique d'origine électromagnétique.

4° *Si, dans le déterminant* $-2F_i$, *on reporte en troisième ligne les astérisques de la première, on obtient le déterminant* $2G_i$.

Ce $G_i$ est identiquement nul, d'après 2°, mais il importe de le conserver par raison de symétrie.

5° *Si, dans chacun des deux déterminants formant* $2(F_i + G_i)$, *on échange entre elles les deux premières lignes, on forme* $-2(F_i + \mathfrak{F}_i)$.

$\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ sont les composantes de la force mécanique d'origine gravifique.

6° *La formule* (1), *écrite avec des* M*, *ayant un second membre identiquement nul, a pour premier membre l'intégrale double d'une différentielle exacte généralisée* (Poincaré, Goursat, etc.). *Les deux dernières lignes du* Δ *du second membre ont alors la forme*

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4}. \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{matrix}$$

$\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, $\Phi_4$ sont les potentiels retardés.

Je pourrais fournir d'autres exemples correspondant toujours à des résultats déjà exposés par M. De Donder; je les réserve pour un travail plus développé.

Terminons sur une remarque capitale.

L'établissement de la formule (1), chose sur laquelle j'ai toujours grandement insisté, ne repose que sur la transformation et la combinaison linéaire d'identités du type

$$\int\int_s X_1\, dX_2\, dX_3 = \int\int\int_v dX_1\, dX_2\, dX_3,$$

où $v$ est un volume de l'espace à trois dimensions enclos dans $s$.

Une telle identité ne repose elle-même que sur la notion d'espace *géométrique* divisé en éléments réunis conformément au principe fondamental du calcul intégral. Or on peut passer de là, par des raisonnements purement analytiques, à l'espace *physique*, à l'espace *phénoménal* et particulièrement à une identité (1) qui met en évidence la forme des équations de l'électromagnétisme et de la gravifique. C'est précisément un point qui paraît captiver au plus haut degré philosophes et physiciens contemporains.

Ce point me paraît être mis ici en évidence avec beaucoup de simplicité.

MAGNÉTISME TERRESTRE. — *Perturbations de la déclinaison magnétique à Lyon pendant le deuxième semestre de* 1919 *et le premier semestre de* 1920. Note de M. **Flajolet**, transmise par M. B. Baillaud.

Les relevés des courbes du déclinomètre Mascart, pendant ces deux semestres, fournissent la répartition suivante :

*Deuxième semestre* 1919.

| Échelle. | | Juill. | Août. | Sept. | Oct. | Nov. | Déc. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | jours parfaitement calmes............ | 10 | 7 | 2 | 5 | 10 | 2 |
| 1 | » avec perturbations de 1′ à 3′.. | 16 | 18 | 5 | 7 | 12 | 12 |
| 2 | » » 3′ à 7′.. | 4 | 4 | 12 | 11 | 4 | 12 |
| 3 | » » 7′ à 15′.. | 1 | 0 | 7 | 6 | 4 | 5 |
| 4 | » » 15′ à 30′.. | 0 | 1 | 4 | 2 | | |
| 5 | » » >30′.. | 0 | 1 | | | | |

*Premier semestre* 1920.

| | | Janv. | Fév. | Mars. | Avril. | Mai. | Juin. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | jours parfaitement calmes............ | 4 | 5 | 5 | 6 | 13 | 13 |
| 1 | » avec perturbations de 1′ à 3′.. | 7 | 11 | 10 | 11 | 11 | 15 |
| 2 | » » 3′ à 7′.. | 15 | 10 | 10 | 9 | 4 | 1 |
| 3 | » » 7′ à 15′.. | 4 | 2 | 5 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | » » 15′ à 30′.. | | 1 | 0 | | | |
| 5 | » » >30′.. | | | 1 | | | |

Deux perturbations très fortes ont été enregistrées, l'une le 11 août 1919 à $16^h 45^m$ (supérieure à 60′), l'autre le 4 mars 1920 (supérieure à 40′); toutes deux sont sorties des limites de la feuille du magnétographe.

L'examen de ces Tableaux semble indiquer une décroissance sensible des fortes perturbations.

## BOTANIQUE. — *Sur la résistance des plantules à l'inanition.* Note (¹) de M. **Henri Coupin**, présentée par M. Gaston Bonnier.

On possède d'assez nombreux documents sur la résistance à l'inanition chez les animaux et, surtout chez l'homme, lequel a été parfois privé de nourriture involontairement ou volontairement, ce dernier cas dans des buts scientifiques ou autres, mais je ne sache pas que l'on eût songé à étudier systématiquement le même phénomène chez les plantes. Cette considération m'a engagé à réunir quelques données sur la question en prenant des plantules élevées à l'obscurité (pour éviter l'apport de carbone par l'atmosphère et son assimilation par la fonction chlorophyllienne) et sans autre nourriture que de l'eau distillée. Les jeunes plantes étaient laissées

(¹) Séance du 13 septembre 1920.

ainsi, depuis leur germination, dans une chambre obscure jusqu'à ce que la mort s'ensuivît, ce qui permettait de se rendre compte du temps pendant lequel elles avaient résisté à l'inanition. A vrai dire, le moment de la cessation de la vie n'est pas facile à évaluer d'une manière très nette, car, d'une part, il n'est pas aisé de distinguer une plantule sur le point de mourir d'une plantule morte et, d'autre part, dans un même lot de graines, en apparence identiques, les unes donnent des plantules vivant un peu plus longtemps ou un peu moins que leurs voisines. Les chiffres obtenus ne doivent, par conséquent, pas être pris dans un sens précis, mais seulement comme exprimant l'ordre de grandeur du phénomène. Cette réserve faite, voici quelques-uns des résultats que j'ai obtenus avec seize espèces choisies, assez différentes les unes des autres par l'importance et la nature de leurs réserves :

| | Mort provenant au bout de : | |
|---|---|---|
| Pin Pignon | 60 | jours d'inanition |
| Potiron | 46 | » |
| Vesce d'hiver | 44 | » |
| Lentille | 40 | » |
| Belle-de-nuit | 39 | » |
| Pois | 33 | » |
| Haricot | 32 | » |
| Soleil | 30 | » |
| Sarrasin gris | 25 | » |
| Radis | 24 | » |
| Capucine | 23 | » |
| Épinard | 22 | » |
| Tomate | 21 | » |
| Betterave | 20 | » |
| Cresson alénois | 18 | » |
| Moutarde | 18 | » |
| Luzerne de Provence | 15 | » |

On voit que la durée de la résistance à l'inanition a, dans cette série, varié de deux mois (*Pin Pignon*) à un demi-mois (*Luzerne de Provence*) avec, pour les autres espèces, des durées intermédiaires. Ces différences d'une espèce à l'autre tiennent, évidemment, à la nature même de son organisme (plus ou moins résistant) et, surtout, à l'abondance et à la nature de ses réserves; *a priori* on eût pu le deviner, mais il était peut-être bon (sans avoir la prétention de faire connaître des faits importants) que la notion fût fixée, dans la mesure du possible, par quelques chiffres, si imprécis qu'il faille les considérer.

PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Sur l'obtention directe du spectre de différence des bouillons-toxines.* Note [1] de M. **Fred Vlès**, présentée par M. Yves Delage.

I. Dans une Note précédente [2], nous avons indiqué que l'on peut obtenir, à partir d'un bouillon-toxine, les spectres de différence d'une substance modifiée d'une façon comparable dans le complexe soit par chauffage à 70°, soit par action du sérum antitoxique spécifique; ces spectres de différence avaient été jusqu'alors fournis par le calcul, au moyen de deux clichés spectrophotométriques indépendants pris sur les deux liquides intéressants. Pour éliminer les longueurs et par conséquent les causes d'erreur de cette technique, nous avons tenté d'obtenir *directement* par une technique différentielle, le spectre de la substance inconnue, que nous désignerons par la lettre T.

La méthode consiste à prendre comme spectre de référence-étalon dans le cliché spectrophotométrique, non plus le spectre du faisceau direct de la source ou celui du solvant pur, mais le spectre même de l'un des deux liquides [3]. Dans ces conditions la lecture du spectrophotogramme doit donner directement une courbe de différences.

La chose est fort simple dans le cas de la toxine altérée par chauffage : il suffit de faire alterner devant le spectrophotomètre deux cuves identiques pleines l'une de toxine intacte, l'autre de toxine chauffée, à concentrations égales; ou d'intercaler deux séries de spectres avec même cuve remplie successivement des deux liquides. Pour la mise en évidence de l'action de l'antitoxine, la technique est plus compliquée, et nous avons dû comparer un mélange toxine-antitoxine évolué, fait depuis plusieurs heures (2, 24, 48...) avec un mélange de mêmes proportions constitué immédiatement au moment de l'examen, et mesuré dans les dix premières minutes après sa fabrication; les éléments de ce mélange de comparaison provenaient bien entendu des mêmes échantillons que le mélange évolué,

---

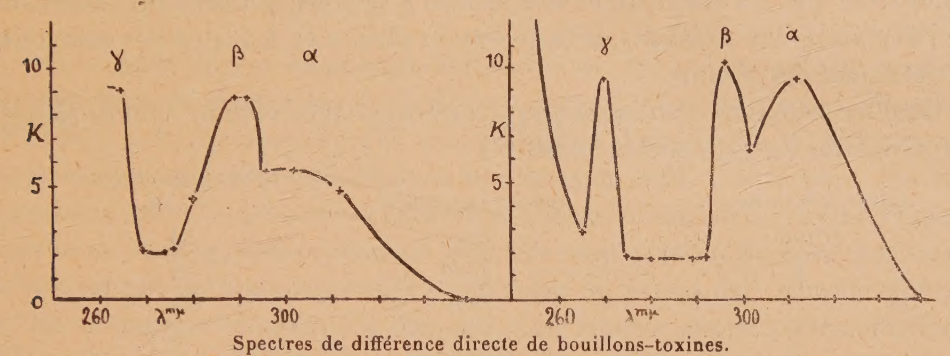
(1) Séance du 6 septembre 1920.

(2) *Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 524.

(3) Cette technique est susceptible d'une grande généralisation et pourrait être appliquée à l'analyse de nombreux complexes encore inconnus au point de vue de la nature et du nombre des constituants, mais dans lesquels nous savons faire varier les propriétés du complexe : diastases, venins, sérums, etc.

avaient été dilués en même temps dans une portion du même solvant, et gardés dans des conditions comparables [1].

Dans ces conditions nous avons pu obtenir directement le spectre de la substance T de bouillons-toxines tétaniques. La concordance entre les résultats ainsi obtenus et ceux de la première méthode constituent une vérification de celle-ci.




Spectres de différence directe de bouillons-toxines.
A gauche par chauffage (2 heures à 78°); à droite par action du sérum antitétanique (autre échantillon, mélange de 54 heures, à bandes décalées).

II. Depuis notre Note précédente, diverses notions ont pu en toute première approximation être recueillies (par la première méthode) sur les propriétés de la substance T et des bouillons toxiques.

1° *Saturation*. — La modification du spectre du bouillon-toxine par l'antitoxine n'est pas instantanée et est fonction du temps, ce qui est d'accord avec la pratique bactériologique. Mais si un aspect de « courbe de saturation » est quelquefois visible, le phénomène a souvent une allure plus compliquée, qui peut tenir à la superposition, aux phénomènes chimiques, de modifications physiques éprouvées par l'état du système.

2° *Modifications physiques*. — On remarque en effet que les divers complexes présentent dans certaines circonstances un renforcement général non sélectif de l'absorption, pouvant se traduire par l'apparition de valeurs négatives dans les différences, et dû visiblement à une modification de l'état physique du complexe (par exemple : grossissement de particules diffractantes, début de précipitation). Ces conditions rendent évidemment précaires l'application de la loi de Beer, et il y a lieu d'employer les liquides comparés aux mêmes concentrations et épaisseurs.

---

(1) Ces précautions sont nécessaires parce que les bandes des spectres de différence des bouillons toxiques paraissent avec le temps se décaler légèrement vers les grands $\lambda$, peut-être par action de l'air : un échantillon débouché depuis un jour a passé par exemple sa bande $\beta$ de $290^{m\mu}$ vers 295.

3° *Indications quantitatives.* — Dans le but d'entrevoir si une relation quantitative pouvait être soupçonnée entre l'importance des bandes et les caractéristiques des substances en présence, nous avons traité, dans des circonstances aussi identiques que possible, des toxines tétaniques de même toxicité par de mêmes excès de sérums antitétaniques de divers pouvoirs antitoxiques. Comme on le verra par les valeurs ci-dessous, il ne serait pas impossible que les absorptions des bandes β se soient, à certains moments de l'évolution des mélanges, grossièrement sériées en fonction des pouvoirs antitoxiques des sérums.

Bouillons-toxines tétaniques au $\frac{1}{200}$, mélangés avec volume égal de sérum antitétanique au $\frac{1}{200}$, contact 50 heures :

| Valeur de la toxine (¹). | Pouvoir antitoxique. | Spectres de différence K λ 296. |
|---|---|---|
| 10000 | 3000 | 36 |
| » | 4000 | 24 |
| » | 5000 | 35 |
| » | 6000 (²) | 9,8 |
| » | 8000 | → 0 |

4° *Interprétation du spectre.* — On ne peut faire, pour le moment, que des hypothèses extrêmement fragiles sur la nature des groupements moléculaires servant de supports aux bandes d'absorption de la substance T. De cet ordre sont, par exemple, les analogies que l'on ne peut manquer de remarquer, à première vue, entre la bande 289-296$^{m\mu}$ de T et celle de certains diphénols (hydroquinone, amines dioxyphénylées, adrénaline), ou peut-être aussi les rapports du spectre total avec celui des pyrrols.

D'autre part, la bande voisine de λ 270 s'est montrée quelquefois légèrement plus réfrangible (265) que la bande des substances protéiques usuelles, ce qui tendrait à faire réserver son interprétation dans ce sens, à moins qu'il n'y ait, dans cette région, coexistence de deux bandes indépendantes partiellement superposées.

5° *Examen d'autres espèces de bouillons-toxines.* — Nous avons eu l'occasion d'étudier un échantillon de toxine diphtérique et un de toxine septique. Les spectres de différence, par actions du chauffage et de l'antitoxine spécifique, ont présenté également des bandes du type T, quoique non

---

(¹) Cote de toxicité : inverse de la fraction minima de centimètre cube tuant, en 4 jours, le cobaye de 350$^{g}$. Cote de l'antitoxine : unités Ehrlich, 1 U. neutralisant, *in vitro*, 100 doses mortelles de toxine. Je dois les échantillons et leurs cotes à mon ami et collègue M. Truche.

(²) Dans cet échantillon, le sérum était dilué au $\frac{1}{300}$.

identiques : celles du complexe diphtérique étaient assez voisines de l'aspect du complexe tétanique, dont s'écartaient davantage celles du complexe septique.

PATHOLOGIE. — *La prévention et le traitement de la fièvre aphteuse par le sérum ou le sang des animaux guéris.* Note [1] de M. **Charles Lebailly**, transmise par M. E. Roux.

On connaît depuis longtemps l'efficacité du sérum antiaphteux expérimental dans le traitement de la fièvre aphteuse (Lœffler, Roux, Nocard, Vallée); si la méthode ne s'est pas répandue, cela tient à la difficulté de préparer en quantité suffisante un sérum assez actif. Les sérums, obtenus péniblement en hyperimmunisant les animaux à l'aide du virus pris dans les aphtes ou le sang, doivent malgré tout être employés à forte dose; leur activité n'est pas de beaucoup supérieure à celle du sérum des animaux guéris. C'est ce dernier sérum qui a été utilisé au laboratoire de bactériologie du Calvados, avec la collaboration de M. Bertin, vétérinaire départemental, et de plusieurs de ses confrères.

*Préparation du sérum.* — Chaque récolte a comporté la saignée de cinq animaux, guéris depuis une dizaine de jours et choisis parmi ceux qui ont été le plus gravement atteints. Chaque animal fournit de $3^l$ à $6^l$ de sang. Les sérums sont recueillis et mélangés, puis répartis dans des bouteilles graduées de $100^{cm^3}$ en $100^{cm^3}$. Ces opérations sont faites aseptiquement; on ajoute par prudence $1^g$ d'acide phénique pour $800^{cm^3}$ de sérum. L'emploi de cette méthode nécessite une entente entre les éleveurs, qui acceptent en général très bien de se fournir mutuellement le sang de leurs animaux. La saignée est absolument inoffensive. Ce procédé exige la proximité d'un laboratoire de bactériologie.

*Préparation du sang.* — Pour plus de commodité, nous substituons ordinairement l'emploi du sang complet à celui du sérum; il donne des résultats identiques et peut être mis en œuvre par tous les vétérinaires sans secours étranger. Les bouteilles graduées sont remplies presque totalement d'eau phéniquée à 5 pour 100, bouchées et couchées. Cette pratique a pour but d'assurer la désinfection sans appareil particulier de laboratoire. Le contact doit durer au moins 2 heures. Avant de se déplacer pour récolter le sang, on vide la bouteille de son contenu antiseptique et l'on introduit à sa place la solution suivante : eau $50^{cm^3}$, chlorure de sodium $5^g$, citrate de soude $5^g$, acide phénique $1^g$. Le sang est recueilli au trocart, aucun ajutage

(1) Séance du 6 septembre 1920.

n'est nécessaire. Quand la bouteille a reçu 800$^{cm^3}$, on mélange soigneusement, par agitation, la solution citratée et le sang. Ce sang reste parfaitement liquide et doit être employé dans les 48 heures. Qu'il s'agisse de sang ou de sérum, l'injection se fait avec l'ajutage utilisé pour le sérum artificiel muni d'une aiguille de gros calibre. L'appareil lui-même peut être désinfecté, par immersion, dans l'eau phéniquée à 5 pour 100.

*Résultats.* — Nous ne distinguerons pas les résultats donnés par le sang de ceux obtenus par le sérum. Nous avons traité plus de 500 animaux, presque exclusivement des bovins. Ces essais ont nécessité l'emploi de 190$^{l}$ de sérum ou sang. Dans la prévention de la fièvre aphteuse, nous avons noté les mêmes résultats que nos prédécesseurs; l'immunité obtenue dans la plupart des cas s'est montrée de durée très brève. Un certain nombre d'animaux ont contracté la maladie par contagion naturelle déjà au bout de 15 jours. D'autres animaux, mais jamais parmi eux des vaches laitières, ont séjourné dans le foyer épidémique jusqu'à son extinction en demeurant indemnes. Les veaux tirent le meilleur profit de l'intervention, à condition toutefois de ne pas être nourris au lait infectieux. Les doses ont été de 200$^{cm^3}$ pour les adultes et de 100$^{cm^3}$ pour les jeunes, cette inoculation sous-cutanée étant répétée au bout de 8 jours.

Dans le traitement de la maladie déclarée, la condition essentielle pour obtenir un bon résultat est d'intervenir aussitôt que possible, avant ou au début de l'apparition des aphtes. Nous avons obtenu par ce procédé une atténuation évidente des symptômes de la maladie; la période d'infection est raccourcie, on constate pendant moins de temps, par rapport aux animaux témoins, les accidents fâcheux ordinaires : anorexie, diminution de la sécrétion lactée, aphtes et complications. La grande quantité de sérum nécessaire, 100$^{g}$ à 200$^{g}$ suivant la taille, nous a obligés à limiter son emploi aux animaux les plus précieux, vaches laitières ou en gestation, veaux, bœufs de travail ou de graisse. L'inoculation intraveineuse de sérum, faite lentement, est très efficace. C'est sur les vaches laitières que les résultats sont toujours les moins brillants; on n'empêche pas chez elles, à coup sûr, l'apparition des aphtes aux trayons. Aucun de nos animaux traités n'est mort, tandis que la mortalité a existé sur les témoins. Nous n'avons fait allusion dans cette Note qu'à nos essais de pure pratique et non aux essais sur les animaux d'expérience qui ont donné des résultats bien supérieurs.

La séance est levée à 15 heures trois quarts.

É. P.